振り子の周期

西本　将樹

1　動機

高校の物理で、振れ角が十分小さい時の振り子の周期の公式

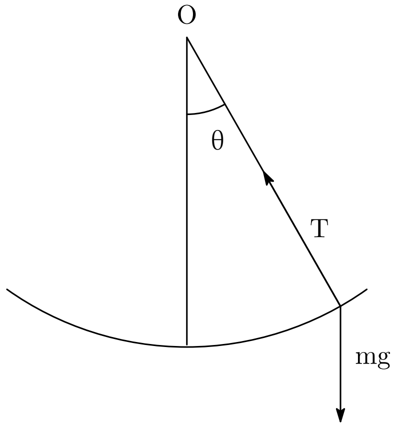
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

という物を習います。これには $\sin\theta \fallingdotseq \theta(\theta \fallingdotseq 0)$ という近似が用いられているため、振れ角がある程度大きくなると、全く異なる値になるはずです。

ところが問題集などで、振れ角が十分小さいという条件が無い状態で「振り子の周期を有効数字２桁で求めよ」という設問をがありました。恐らくこれは問題ミスなのですが、実は十分小さくなくても、有効数字２桁くらいならまだ影響が出ない程度の誤差にとどまるのかなぁ〜と思い、数学的に検証してみようと思ったのが動機です。

2　計算

軽い糸に質量 m の質点がつけられた長さ l の振り子を考えます。振り子の位置を次のように θ で表し、その時の質点の速度を反時計回りを正として v とします。



まず運動方程式を作ります。円の接線方向の運動方程式から

$$m\frac{dv}{dt} + mg\sin\theta = 0$$

また、$v = l\dfrac{d\theta}{dt}$. 両辺に v を乗じて、

$$mv\frac{dv}{dt} + mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

これを変形すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta\right) = 0$$

よって

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta = const^{*1}$$

$t = 0$ で真下 $\theta = 0$ を通るとして、最高点の角度を $\theta = \phi$ とする。$0 \leq t \leq \dfrac{T}{4}$ の範囲を考える。この範囲で $v \geq 0$。先ほどの式から $1/2mv^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\phi$ だから

$$v = \sqrt{2gl\left(\cos\theta - \cos\phi\right)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\phi\right)}$$

これは変数分離の微分方程式だから、$\dfrac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\phi}} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}dt$ で両辺を積分。省略せずに書けば、

$$\frac{d}{d\theta}(\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\phi}}) = \sqrt{\frac{2g}{l}}\frac{dt}{d\theta}$$

から、

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\phi}} - \sqrt{\frac{2g}{l}}t = const$$

$t = 0$ で $\theta = 0$(初期条件) だから、"$const$" $= 0$

$t = \dfrac{T}{4}$ で $\theta = \phi$ を代入して、

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\phi}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \frac{T}{4}$$

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}}\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\phi}}$$

となって周期の計算式が完成した。

3 結果の観察

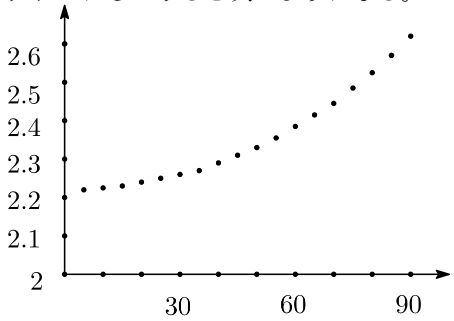
実際にいくつかの ϕ に対して T の値を計算してみた。

ϕ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\sqrt{\frac{g}{8l}}T$	2.222	2.226	2.231	2.238	2.248	2.260	2.274	2.291	2.310

ϕ	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$\sqrt{\frac{g}{8l}}T$	2.332	2.357	2.384	2.415	2.448	2.486	2.527	2.572	2.622

*1 エネルギー保存則を数学的に導いた事になる

グラフにしてみると次のようになる。



4　まとめ

結果をどう感じるかは人それぞれだと思います。僕自身もただ興味本位で計算してみただけなので、大した結論もありません。これだけ違うのだったら、教科書とかは、そういう事をもっとちゃんと教育するべきだと思いますね。小学校の時だって確か、振り子の等時性とか言って、「周期は振れ幅に依らず長さによって決まる」という法則を習った気がするのに。僕もほとんど同じに近似して良いという認識だったんだけど、そういうにしてはずれは大きすぎるんじゃないかと思います。という事でまとめ終わり。

意見、感想、指摘などは nisimotomasaki@funifuni.net まで。